（15）（本题满分 10 分）

计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$

【解析】：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}e^{2-2\cos x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^2\right)\right)}{x^4}\text{(泰勒公式)}$$

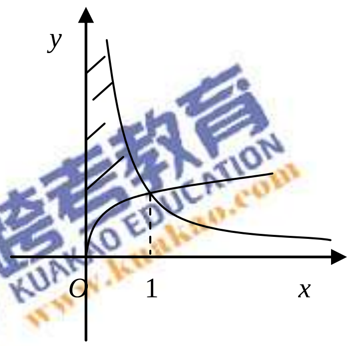
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{12}+o\left(x^2\right)}{x^4}$$

$$=\frac{1}{12}$$

（16）（本题满分 10 分）

计算二重积分$\iint\limits_D e^x xydxdy$，其中 D 为由曲线$y=\sqrt{x}$与$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$所围区域。

【解析】：由题意知，区域$D=\left\{(x,y)\,|\,0<x\le 1,\sqrt{x}<y<\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right\}$，如图所示所以



$$\iint\limits_D e^x xydxdy=\lim_{x\to 0}\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}e^x xydy$$

$$=\lim_{x\to 0}\int_0^1 e^x x\left(\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}dx$$

$$=\lim_{x\to 0}\int_0^1 e^x x\left(\frac{1}{2x}-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\int_0^1 e^x dx-\int_0^1 e^x x^2 dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(e-1-e^x x^2\Big|_0^1+2\int_0^1 e^x x dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(-1+2\int_0^1 x de^x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(-1+2\left(e^x x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(-1+2\left(e-(e-1)\right)\right)=\frac{1}{2}$$

（17）（本题满分 10 分） 求 $xy+2yz$ 在条件下 $(x^2+y^2+z^2)=10$ 下的最值.

【解析】：令 $F(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-10\right)$, 用拉格朗日乘数法得

$$\begin{cases}F_x'=y+2\lambda x=0,\\ F_y'=x+2z+2\lambda y=0,\\ F_z'=2y+2\lambda z=0,\\ F_\lambda'=x^2+y^2+z^2-10=0,\end{cases}$$

求解得六个点： $A\left(1,\sqrt{5},2\right),B\left(-1,-\sqrt{5},-2\right),$

$C\left(1,-\sqrt{5},2\right),D\left(-1,\sqrt{5},-2\right),$

$E\left(2\sqrt{2},0,-\sqrt{2}\right),F\left(-2\sqrt{2},0,\sqrt{2}\right).$

由于在点 A 与 B 点处, $u=5\sqrt{5}$； 在点 C 与 D 处, $u=-5\sqrt{5}$； 在点 E 与 F 处, $u=0$.

又因为该问题必存在最值, 并且不可能在其它点处, 所以 $u_{\max}=5\sqrt{5}$, $u_{\min}=-5\sqrt{5}$.